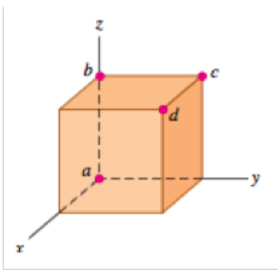
"sapere aude"
I.E.S. Nicolás Copérnico
http://www.iesnicolascopernico.org/fisica.htm
Ronda de los Molinos, s/n. Écija.
e-mail: fisicayquimica@iesnicolascopernico.org

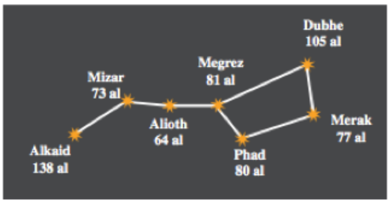
BOLETÍN DE PROBLEMAS · CÁLCULO VECTORIAL

1. Los tres finalistas de un concurso de TV se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno cuenta con una regla graduada de 1 m de longitud, una brújula, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos: 72,4 m (32º al este del Norte); 57,3 m (36º al sur del oeste); 17,8 m (al sur). Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, la ganadora del premio calcula adónde debe ir. ¿Qué calculó y cuál fue el resultado?

2. Un cubo (de 1m de arista) se coloca de forma que una esquina esté en el origen de coordenadas, y tres aristas estén sobre los ejes X, Y, Z (ver figura). Usando vectores, determinar (a) el ángulo entre la arista sobre ele eje z (línea ab) y la diagonal que va del origen a la esquina opuesta (línea ad); (b) el ángulo entre las líneas ad y ac (diagonal de una cara)



3. Las estrellas de la Osa Mayor parecen estar todas a la misma distancia de la Tierra, pero en realidad están muy lejanas entre sí. La figura muestra las distancias desde la Tierra (≈ desde el Sol) a cada una de las estrellas en años-luz (al) ($1\ al\ = 9,461 \times 10^{15} m$). (A) Alkaid y Merak están separadas 25,6 º en el firmamento nocturno. Determinar la distancia (en al) de Alkaid a Merak; (B) Para un observador que viviese en un planeta cercano orbitando a Merak, ¿cuántos grados de separación en el cielo habría entre Alkaid y el Sol?

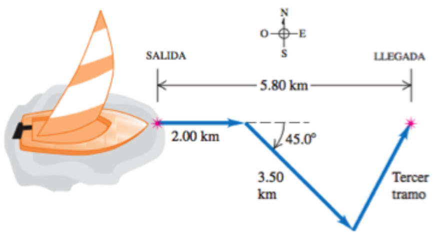


4. Señala de entre las siguientes, cuál(es) son la(s) operación(es) matemáticamente incorrecta(s), explicando el motivo en cada caso: (1) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$; (2) $k\vec{A} \wedge q\vec{B}$; (3) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \cdot \vec{C})$; (4) $\vec{A} \cdot (\vec{B} - \vec{C})$; (5) $(\vec{A} - \vec{B}) \cdot k\vec{C}$; (6) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$

5. Demostrar (usando las definiciones de productos de vectores) que, sin importar lo que sean los vectores A y B se tiene siempre que $\vec{A} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$

6. Una avioneta sale de un aeropuerto y vuela 170 km en una dirección 68º al este del norte; luego cambia el rumbo y vuela 230 km a 48º al sur del este, para efectuar un aterrizaje de emergencia en una pista improvisada. ¿En qué dirección y qué distancia deberá volar una cuadrilla de rescate?

7. Un marinero en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2 km al este, luego 3,5 km al SE y después de otro tramo en dirección desconocida. Su posición final es 5,8 km directamente al este del punto inicial (ver figura). Calcula la magnitud y dirección del tercer tramo.



8. Imagina que acampas con dos amigos, José y Carlos. Puesto que a los tres os gusta la privacidad, no levantáis las tiendas juntas. La de José está a 21 m de la tuya, en dirección 23º al sur del este. La de Carlos está a 32 m de la tuya en dirección 37º al norte del este. ¿Qué distancia hay entre las tiendas de Carlos y José?

9. En la molécula de metano, CH_4, cada átomo de hidrógeno está en la esquina de un tetraedro regular, con el átomo de carbono en el centro. En coordenadas en las que uno de los enlaces $C - H$ esté en la dirección $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, un enlace $C - H$ adyacente está en la dirección $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ Calcular el ángulo entre estos dos enlaces.

10. Sean dos vectores ($\vec{A}\ y\ \vec{B}$) con un punto común y que forman entre sí un ángulo α. Con técnicas vectoriales demostrar que el módulo de su suma es $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\, cos\, \alpha}$

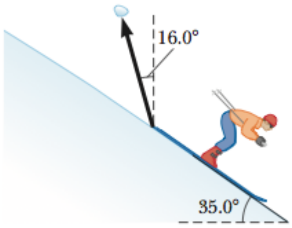
11. Dos vectores ($\vec{A}\ y\ \vec{B}$) tienen 3 unidades de módulo cada uno. Su producto $\vec{A} \wedge \vec{B} = -5\vec{k} + 2\vec{i}$. Determinar el ángulo entre los dos vectores.

12. ¿Qué ángulo han de formar dos vectores entre sí para que su producto escalar coincida con el módulo de su producto vectorial?

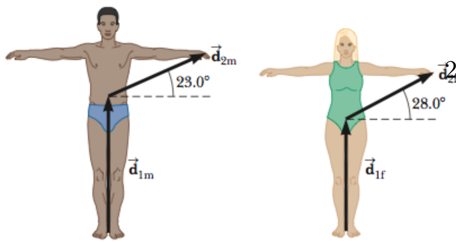
13. Dados los vectores $\vec{M} = -\vec{i} + 7\vec{k}$ y $\vec{N} = 3\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$. Obtener un

vector unitario que sea perpendicular a ambos, así como la dirección de éste con los ejes.

14. Una pista de esquí tiene una inclinación de 35º sobre la horizontal. Cuando una persona salta sobre su cima, un trozo de nieve sale despedida 1,5 m hacia la cima con un ángulo de 16º sobre la vertical(ver figura). Encontrar las componentes de máximo desplazamiento de ese trozo de nieve (paralelo y perpendicular a la superficie)



15. La siguiente figura muestra las proporciones anatómicas típicas en un hombre y una mujer. Los desplazamientos señalados $\vec{d}_{1m}$ y $\vec{d}_{1f}$ desde la planta de los pies al ombligo son de 104 cm y 84 cm respectivamente. Las distancias $\vec{d}_{2m}$ y $\vec{d}_{2f}$ desde el ombligo a la punta de los dedos son de 100 y 86 cm respectivamente. Encontrar la distancia de la planta de los pies a la punta de los dedos en cada caso.

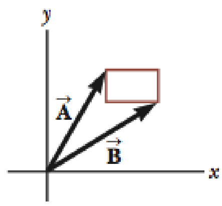


16. Una estación de radar localiza un barco a la deriva a 17,3 km y 136º respecto del norte (en el sentido de las agujas de reloj). Desde esa misma estación, un avión de rescate está a 19.6 km de la estación, 153º respecto del norte (en el sentido de las agujas del reloj) y 2.2 km de altura. Escribe el vector de posición del barco respecto al avión de rescate y determina la distancia que separa a ambos.

17. Una persona fregando un suelo con la mopa, hace dos desplazamientos. El primero de 150 cm forma un ángulo de 120º con el eje $+OX$. La resultante de los dos desplazamiento es de 140 cm con un ángulo de 35º con el eje $+OX$. Determinar la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

18. Una persona situada en el suelo (origen de coordenadas) observa un avión que se mueve con rapidez constante paralelo al suelo y una altura de 7,6 km. En el instante $t = 0$ el vector de posición del avión es $\vec{r}_0 = 7{,}6 \times 10^3 \vec{j}\ (m)$. En el instante $t = 30{,}0\ s$ el vector de posición es $\vec{r}_{30} = (8{,}04 \times 10^3 \vec{i} + 7{,}6 \times 10^3 \vec{j})\ (m)$. Calcular la distancia y orientación (ángulo) del avión en el instante $t = 45\ s$

19. El rectángulo que se muestra en la figura posee sus lados paralelos a los ejes coordenados. Los vectores de posición de los vértices señalados tienen 10 m de módulo ($\vec{A}$) y 50º y 12 m de módulo ($\vec{B}$) y 30º. Calcular: (a) el perímetro del rectángulo; (b) la magnitud y dirección del vector de posición del vértice más alejado.



20. Un barco transporta turistas entre tres islas. Navega de la primera a la segunda isla, situada a 4.76 km en dirección 37º NE. Posteriormente, navega de la segunda a la tercera en una dirección de 69º NW. Finalmente regresa a la primera isla navegando a 28º SE. Calcular la distancia entre (a) la segunda y la tercera isla; (b) la primera y la tercera isla.

21. Un controlador aéreo observa dos aviones en la pantalla de radar. El primero está a 800 m de altura, 19,2 km de distancia horizontal y 25º SW. El segundo avión está a 1100 m de altura, 17,6 km de distancia horizontal y 20º SW. Calcula la distancia entre los dos aviones.

22. Un avión que se mueve a 300 m/s hacia el Este, entra en una zona de viento donde el aire sopla a 100 m/s con 30º NE. ¿Cuál es la nueva rapidez y dirección del avión?

23. Dados los vectores $\vec{A} = (6\vec{i} - 8\vec{j})$, $\vec{B} = (-8\vec{i} + 3\vec{j})$ y $\vec{C} = (26\vec{i} + 19\vec{j})$. Determinar (si existen) los parámetros a y b para que se cumpla que $a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = 0$

24. Sean los mismos vectores del ejercicio anterior. Calcula: (a) $3\vec{A} \cdot \vec{C}$; (b) $\vec{C} \wedge (-2\vec{B})$; (c) $\frac{\vec{A}}{2} \wedge (-\vec{C})$; (d) ¿Son perpendiculares los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

25. El vector $\vec{A}$ del ejercicio 23 tiene su punto de aplicación en $P(1, -2, 6)$. Calcula el Momento de $\vec{A}$ respecto del punto $Q(0, 5, -2)$ determinando igualmente la dirección de ese vector momento.

26. Sean los vectores $\vec{M} = 5\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{N} = -\vec{j} + 9\vec{k}$ que poseen su punto de aplicación común en $R(1, -5, 8)$. Comprobar que el Momento de la resultante de esos vectores respecto del origen de coordenadas, es igual a la suma de los momentos individuales respecto del mismo punto.

27. Hallar un vector de módulo unidad que sea perpendicular a los vectores $\vec{M}$ y $\vec{N}$ del ejercicio anterior. ¿Son Qué ángulo forman entre sí esos vectores $\vec{M}$ y $\vec{N}$?

28. El vector de posición de un objeto móvil viene dado por la expresión $\vec{r} = (1 + 3t^2)\vec{i} + 4\vec{j}$ mientras que la expresión matemática que nos permite deducir su vector velocidad es de la forma $\vec{v} = 6t\,\vec{i}$. Deducir a qué distancia del origen se sitúa el cuerpo en el instante $t = 2\,s$ y con qué velocidad se mueve en ese momento. ¿Qué ángulo forman entre sí los vectores de posición y velocidad en ese preciso momento?

29. En física, el trabajo mecánico realizado por una determinada fuerza a lo largo de cierto desplazamiento se define como el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento, $W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Sin embargo, hay ocasiones en las que incluso existiendo fuerza aplicada y desplazamiento, ese trabajo W es cero. ¿Por qué y cuándo?